Critère de compacité forte dans L^p.

Leçon : 201, 203, 209, 234

Rqs : Brezis, HL

Théorème (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que :

i) $\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \subset\subset \Omega, \exists \delta \in]0, d(\omega, \Omega^c)[$,

$$\sup_{|h|<\delta} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \omega \subset\subset \Omega, \ \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon$.

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

Notations : $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$

- $\omega \subset\subset \Omega \iff \omega$ est fortement inclus dans Ω
  $\iff \bar{\omega}$ compact et $\bar{\omega} \subset \Omega$

Preuve

Stratégie : • se ramener à des fonct° régulières par convolution
• utiliser Ascoli
• Conclure.

Par le théorème de Riesz-Fischer, $L^p(\Omega)$ est complet. Donc la relative compacité de $\mathcal{F}$ est équivalente à sa précompacité.

Soit $(\rho_n)_n$ une suite régularisante (ie $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}(\rho_n) \subset \bar{B}(0, 1/n)$, $\int \rho_n = 1$, $\rho_n \geq 0$).

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tq

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon$$

On va mq $\mathcal{F}|_\omega$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Étape 1 : Régularisation.

Pour $f \in \mathcal{F}$, on pose $\bar{f} : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{K}$)

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \Omega \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

On note $\bar{\mathcal{F}} := \{\bar{f},\ f \in \mathcal{F}\}$. → utiliser $\bar{\mathcal{F}}$ plutôt

Alors $\bar{\mathcal{F}}$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{F}$ l'est dans $L^p(\Omega)$).

Soit δ donné par ω, alors

$$\sup_{|h| < \delta} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tau_h \bar{f} - \bar{f}\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon.$$

Soit $m > 1/\delta$. Alors pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $\bar{f} \in \bar{\mathcal{F}}$, on a

$$|(\rho_m * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|\, \rho_m(y)\, dy$$

On $t \mapsto t^p$ est convexe, et $d\rho_m(y)$ est une mesure de proba, donc $\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|\, \rho_m(y)\, dy\right)^p$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_m(y)\, dy$$

Donc $|(\rho_m * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)| \leq \left(\int |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_m(y) dy\right)^{1/p}$.

et, puvent $|(\rho_m * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)|^p \leq \int_{B(0,1/m)} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_m(y)\,dy$

En intégrant sur ω, on obtient :

$$\|\rho_m * \bar{f} - \bar{f}\|^p_{L^p(\omega)} \leq \int_\omega \int_{B(0,1/m)} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_m(y)\,dy\,dx$$

On par i), comme $\frac{1}{m} < \delta$, on a

$$\|\rho_m * \bar{f} - \bar{f}\|^p_{L^p(\omega)} \overset{\text{Fubini}}{\leq} \int_{B(0,1/m)} \rho_m(y) \int_\omega |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p\,dx\,dy$$

$$\leq \int_{B(0,1/m)} \rho_m(y) \|\tau_{-y}\bar{f} - \bar{f}\|^p_{L^p(\omega)}\,dy$$

$$\leq \varepsilon^p.$$

Donc $\forall \bar{f} \in \bar{F}$, $\forall m > 1/\delta$, $\|\rho_m * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$.

Étape 2 : Application de Ascoli

On fixe maintenant un $m \in \mathbb{N}$. On note $\tilde{T}_m := (\rho_m * \bar{T})|_{\bar{\omega}}$.

Mq $\tilde{T}_m$ vérifie les hypothèses du théorème d'Ascoli.
$\hookrightarrow \subset \mathcal{C}(\bar{\omega}, \mathbb{K})$

- $\tilde{T}_m$ bornée : $\forall \bar{f} \in \bar{F}$, $\|\rho_m * \bar{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_m\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \|\bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$
(car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Hölder).

- équicontinue : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$, $\forall \bar{f} \in \bar{F}$,

$$|(\rho_m * \bar{f})(x_1) - (\rho_m * \bar{f})(x_2)| \leq \|\rho_m\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \|\tau_{x_1}\bar{f} - \tau_{x_2}\bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$
$$= \|\rho_m\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \|\tau_{x_1 - x_2}\bar{f} - \bar{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Donc pour $|x_1 - x_2| < \delta$, $|\rho_m * \bar{f}(x_1) - \rho_m * \bar{f}(x_2)| \leq \varepsilon \|\rho_m\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$.

Donc $\mathcal{F}_n$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(\bar{\omega})$, donc dans $L^p(\omega)$ ($\bar{\omega}$ est compact donc ω borné).

<u>Étape 3</u> Relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Pour $\varepsilon > 0$, on fixe $n > 1/d$ tq

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \|\rho_n * \bar{f} - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon. \quad (\text{étape } 1).$$

$\mathcal{F}_n$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$, on peut recouvrir $\mathcal{F}_n$ par un nombre fini de boules de rayon ε (dans $L^p(\omega)$).

Les boules de rayon 2ε recouvrent alors $\mathcal{F}|_\omega$.

Donc $\mathcal{F}|_\omega$ relativement compact dans $L^p(\omega)$.

<u>Étape 4</u> Relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

On a $\mathcal{F}|_\omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(g_i, \varepsilon)$, $g_i \in L^p(\omega)$.

On pose $\tilde{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x), & x \in \omega \\ 0, & x \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$

Alors $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\tilde{g}_i, 2\varepsilon)$. (car $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \varepsilon$).

$\square$

→ applicat° : corollaire IV.27 Brezis
. injection des Sobolev.

rmq : la réciproque est vraie.

être au point sur : - Ascoli,
- suites régularisantes
- compacité → classique, → relative, → pro- ⊕ lien entre les 3.

Déf Une partie A d'un espace métrique est dite précompacte si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \dots, x_m \in A$ tq $A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon)$.

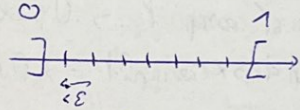
Déf Une partie A d'un espace topologique est compacte si de tout recouvrement de A par des ouverts de E, on peut en extraire un nouveau recouvrement fini.

H-L, Topo Que, Gourdon

compact $\Rightarrow$ précompact (dans les métriques).

$\not\Leftarrow$ Ex: $]0,1[$ muni de la métrique usuelle est précompact.

en effet, si $n > 1/\varepsilon$, on a, les boules $B(k/n, \varepsilon)$, $k = 1, \dots, n-1$ recouvrent $]0,1[$



Thm X compact $\Leftrightarrow$ précompact et complet, (X, d) espace métrique.

$\Rightarrow$ immédiat.

$\Leftarrow$ Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$, (E, d) espace métrique. Tq que l'on peut extraire de $(x_n)_n$ une sous-suite CV.

On recouvre E par des boules de rayon 1. Il existe une boule, disons $B(a_0, 1)$, qui contient une infinité de $(x_n)_n$.

Soit $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tt tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{\varphi_0(n)} \in B(a_0, 1)$.

On recouvre $B(a_0, 1)$ par des boules de rayon $1/2$ ($B(a_0, 1) \subset E$ donc $B(a_0, 1)$ est précompact).

De même, il existe $a_1 \in E$ tq $B(a_1, 1/2)$ contient une infinité de $x_{\varphi_0(n)}$. Soit donc φ_1 tq $x_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)} \in B(a_0, 1) \cap B(a_1, 1/2)$.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall R \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_R(n)} \in \bigcap_{i=0}^{R} B(a_R, 2^{-i})$.

On pose $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} \in \bigcap_{i=0}^{n} B(a_i, 2^{-i})$.

Donc, $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(p)}) \leq 2^{-p+1}$ si $n \geq p$.

diamètre

$\left(\text{car } \bigcap_{i=0}^{n} B(a_i, 2^{-i}) \subset \bigcap_{i=0}^{p} B(a_i, 2^{-i})\right)$

donc $(x_{\varphi(n)})_n$ est de CY $\Rightarrow (x_{\varphi(n)})_n$ CV car E complet.

$\square$

<u>Thm</u> X métrique. $A \subset X$.

1) A relativement compact $\Rightarrow$ A précompact
2) A précompact $\oplus$ X complet $\Rightarrow$ A relativement compact.

<u>App du théorème:</u>

intervalle borné

<u>Thm</u> [Brezis] L'injection $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ est compacte, $1 \leq q < \infty$.

<u>Preuve</u> Soit $\mathcal{F}$ la boule unité de $W^{1,1}(I)$. Mq $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^q(I)$.

- Soit $\omega \subset\subset I$, $u \in \mathcal{F}$, et $|h| < d(\omega, I^c)$.

On a $\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \underset{(*)}{\leq} |h| \|u'\|_{L^1(I)} \leq |h|$.

(*) détail après (caractérisat° des Sobolev)

Donc $\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q dx \leq \underbrace{(2\|u\|_{L^\infty})^{q-1}}_{\leq C|h|} \int_\omega |u(x+h) - u(x)| dx$

$\Rightarrow \|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} \leq C^{1/q} |h|^{1/q} < \varepsilon$ si $|h| < \delta$.

- Pour $u \in \mathcal{F}$, $\|u\|_{L^q(I \setminus \omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(I)} |I \setminus \omega|^{1/q} \leq \varepsilon$

si ω assez grand ($I \setminus \omega$ — petit).

$\square$

Détail de (*):

$$u(x+h)-u(x)=\int_x^{x+h} u'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow |u(x+h)-u(x)| \leq \int_x^{x+|h|} |u'(t)|\,dt \qquad (h>0)$$

$$\cancel{= \|u(x+h)-u(x)\|_{L^1(\omega)} \overset{\text{Fubini}}{\leq} \int_x^{x+h}\int_\omega |u'(t)|\,dx\,dt}$$

$$\cancel{\leq \|u'\|_{L^1}\,|h|.}$$

$$\Rightarrow |u(x+h)-u(x)| \leq |h| \int_0^1 |u'(x+sh)|\,ds \qquad t = x+sh$$

$$\Rightarrow |u(x+h)-u(x)| \leq |h|\,\|u'\|_{L^1(I)} \qquad \|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leq C|h|.$$